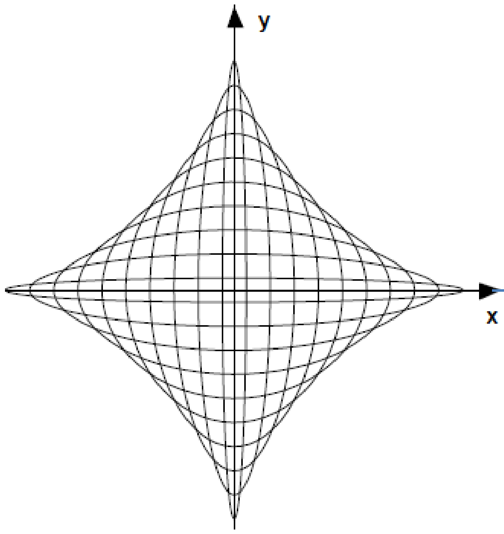


Asteroiden

Text Nummer: 54115

Stand: 17. April 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Asteroide (Astroide, Sternkurve) ist ein dankbares Untersuchungsobjekt. Allerdings wird man bei der Durchsicht dieses Textes entdecken, dass die Anforderungen bei den Integralen weit über das Schulniveau hinausgeht. Vielleicht gerade interessant für den neugierigen Leser.

Methoden dazu findet man im Text 54011 Differentialgeometrie

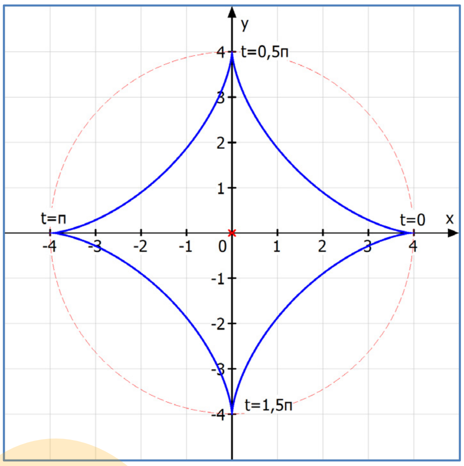
Viel Spaß beim Stöbern.

Inhalt

1 Vorschau: Asteroide (Astroide, Sternkurve)

Mögliche Parametergleichungen:

Abbildung mit a = 4:



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos^3(t) \\ a \cdot \sin^3(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0\,;2\pi[$$

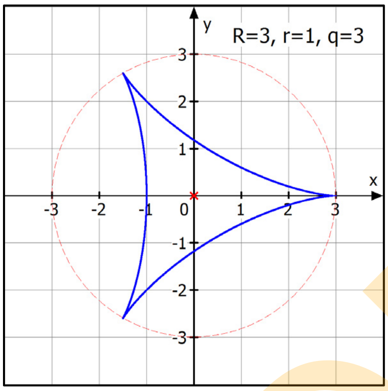
oder: $\vec{x}(t) = (R-r) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos((q-1)t) \\ -\sin((q-1)t) \end{pmatrix}$

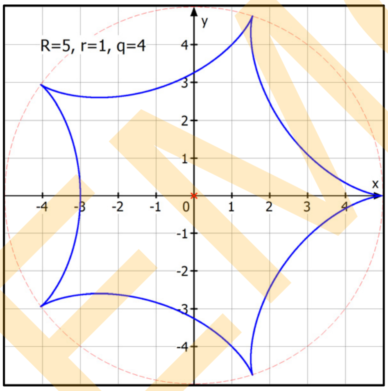
Zur Abbildung gehört: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(t) + \cos(3t) \\ 3 \cdot \sin(t) - \sin(3t) \end{pmatrix}$

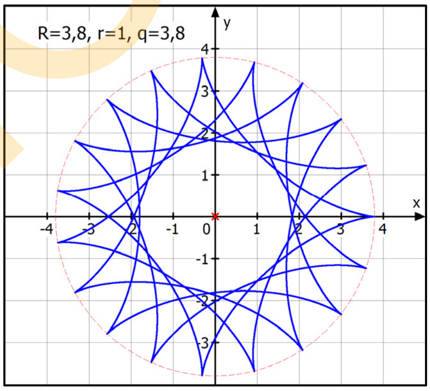
Koordinatengleichung: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Weitere Beispiele: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(t) + \cos(2t) \\ 2 \cdot \sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;2\pi[$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) + \cos(4t) \\ 4 \cdot \sin(t) - \sin(4t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;2\pi[$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2{,}8 \cdot \cos(t) + \cos(2{,}8t) \\ 2.8 \cdot \sin(t) - \sin(2{,}8t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;10\pi[$







Asteroiden können auf zwei Arten **geometrisch** erzeugt werden:

(1) als Rollkurve im Innern eines Kreises, daher heißt sie auch Hypozykloide,

(2) als Einhüllende einer gleitenden Strecke oder auch von bestimmten Ellipsenscharen.

Informationen:

Der Flächeninhalt der Asteroide beträgt $A = \frac{3}{8}\pi a^2$, der Umfang ist $U = 6a$.

Die Bogenlänge im Kurvenviertel $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$ ist $s(t) = \frac{3}{2}a \cdot \sin^2(t)$.

Der Krümmungsradius ist $\rho(t) = \frac{3}{2}a \cdot \sin(2t)$

Hinweis: ρ ist der griechische Buchstabe „Rho“.

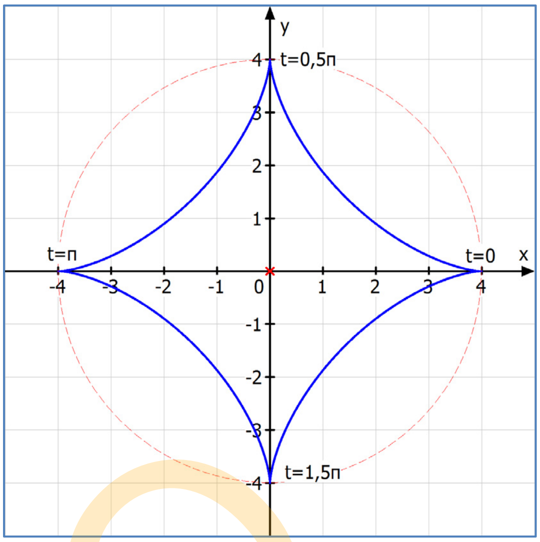
2 Gleichungen der Asteroiden

Die Parametergleichung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos^3(t) \\ a \cdot \sin^3(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0\,;2\pi[$$

liefert für a = 4 diese Kurve:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos^3(t) \\ 4 \cdot \sin^3(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0\,;2\pi[$$



Stellt man die trigonometrischen Formeln

$$\sin(3t) = 3 \cdot \sin(t) - 4 \cdot \sin^3(t)$$
$$\cos(3t) = 4 \cdot \cos^3(t) - 3 \cdot \cos(t)$$

nach $\cos^3(t)$ bzw. $\sin^3(t)$ um, erhält man andere Parametergleichungen.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(t) + \cos(3t) \\ 3 \cdot \sin(t) - \sin(3t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0\,;2\pi[$$

Umrechnung in eine implizite algebraische Gleichung:

Aus $x = 4 \cdot \cos^3(t)$ und $y = 4 \cdot \sin^3(t)$

folgt: $\frac{x}{4} = \cos^3(t)$ $\frac{y}{4} = \sin^3(t)$

Dann potenziert man beide Gleichungen mit $\frac{2}{3}$:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\cos^3(t)\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin^3(t)\right)^{\frac{2}{3}}$$

d. h. $\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2(t)$ $\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2(t)$

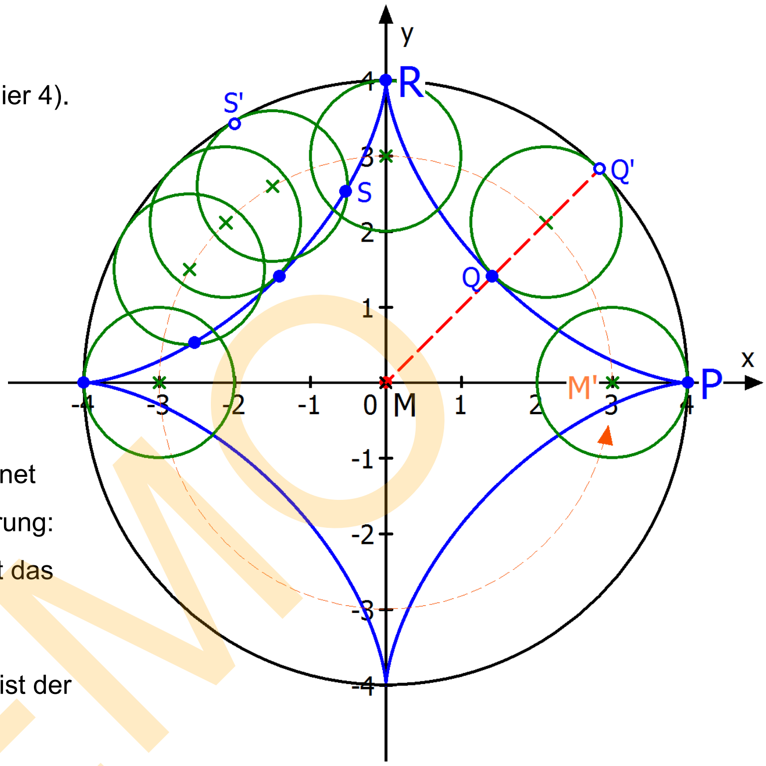
Addieren: $\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \quad | \cdot 4^{\frac{2}{3}}$

Ergibt: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

Allgemein wird dann aus $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos^3(t) \\ a \cdot \sin^3(t) \end{pmatrix}$ die Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

3 Die Asteroide ist eine Hypozykloide

Wenn sich der Leser bereits mit der Zykloide beschäftigt hat (Text 54101), dann kennt er Rollkurven. Bei einer Zykloide rollt ein Kreis auf einer Geraden ab. Die Bahn, die dabei ein fester Punkt des Kreisumfangs beschreibt, nennt man Rollkurve bzw. Zykloide. Jetzt lassen wir diesen Kreis nicht auf einer Geraden, sondern im Innern eines großen Kreises (Basiskreis) abrollen.



Der innere Kreis hat den Radius r (hier 1).
Der äußere Kreis hat den Radius $R = q \cdot r$ (hier 4).

Wir betrachten für t = 0 den Punkt $P(4\,|\,0)$.
Der innere Kreis rollt nun nach oben.
Wir untersuchen zuerst die Position von P nach 45° (t = $\frac{1}{4}\pi$). Durch die Rollbewegung hat sich P in die Position Q verlagert. Der Berührpunkt der beiden Kreise ist jetzt Q'.

Die Länge des Bogens $\overset{\frown}{PQ'}$ kann so berechnet werden: $\overset{\frown}{PQ'} = t \cdot r = \frac{1}{4}\pi \cdot 4 = \pi$. (Zur Erinnerung: t ist der Winkel im Bogenmaß, und zu 45° ist das Bogenmaß $\frac{1}{4}\pi$.)

Der abgerollte Bogen auf dem kleinen Kreis ist der Halbkreis $\overset{\frown}{Q'Q} = \pi \cdot r = \pi \cdot 1 = \pi = \overset{\frown}{PQ'}$.

Nach dem Abrollen um t = 90° bzw. $\frac{1}{2}\pi$ ist der „wandernde“ Punkt P in der Position R angekommen.

Sehen wir uns noch die etwas schwierigere Position S an.
Ich habe S in die Position gesetzt, in der der Mittelpunktwinkel $\sphericalangle PMS = 120^{\circ} \hat{=} \frac{1}{3}\pi$ beträgt.
Damit kann man die Koordinaten von S berechnen:

$$\vec{x}\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos^3\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ 4 \cdot \sin^3\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \\ 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \\ 4 \cdot \frac{3}{8}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2{,}6 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad S(-0{,}5\,|\,2{,}6)$$

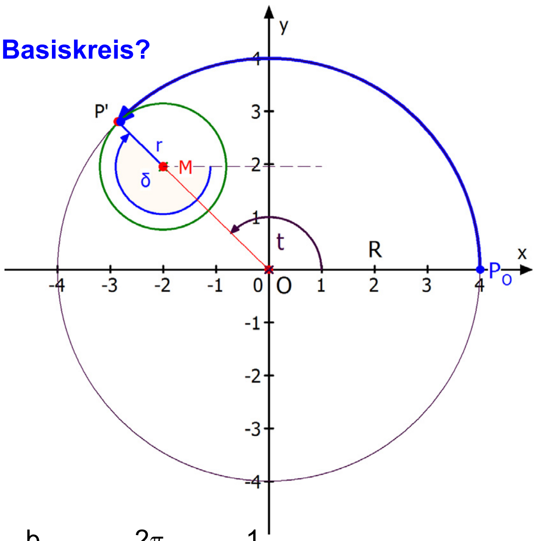
Man kann der Täuschung erliegen, dass man vermutet, dass die Bogen $\overset{\frown}{PQ}$ und $\overset{\frown}{PQ'}$ gleich lang sind oder $\overset{\frown}{PQR} = \overset{\frown}{PQ'R}$. Dies stimmt jedoch nicht, wie die später folgende Berechnung der Bogenlänge der Asteroide zeigt.

Ich nehme vorweg: Es gilt: U = 6a, bei a = 4 also $U = 24$.

Der Umfang des großen Kreises ist größer: $U_{gr} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 25{,}13$ (LE).

Für den Viertelbogen sind das also 6 LE bzw. $2\pi \approx 6{,}28$ LE. Der Kreisbogen ist also um 4,5% länger.

Wie oft dreht sich der kleine Kreis bei einem Umlauf im Basiskreis?



Bleiben wir beim gezeichneten Beispiel, bei dem R = 4r ist. (R heißt oft auch a). Beim Abrollen des kleinen Kreises wird der große Kreis von P bis P‘ von innen berührt. Der kleine Kreis hat sich genau dann einmal gedreht, wenn dieser Bogen gleich groß ist, wie der Umfang des kleinen Kreises. $U_{kl} = 2\pi r = 2\pi$.

Wie groß ist der Mittelpunktwinkel t des Kreissektors des Basiskreises, dessen Bogen 2π ist?

Für den Bogen gilt die Verhältnisgleichung $\frac{b}{U} = \frac{t}{2\pi} \Rightarrow t = \frac{b}{U} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 4} 2\pi = \frac{1}{2}\pi$.

Das ist aber gerade ein rechter Winkel.

Folgerung: **Der kleine Kreis dreht sich bei seinem Umlauf in diesem Beispiel viermal.**

Verallgemeinerung: Nun sei allgemein $R = q \cdot r$. Dann ist der Umfang des großen Kreises q-mal so groß wie der Umfang des kleinen inneren Kreises. Das heißt aber, dass der kleine Kreis q Abrollungen macht, bis er wieder in der Ausgangslage P_O angekommen ist. Ist also q eine natürliche Zahl, dann schließt sich die Kurve nach einem Abrollvorgang. Wenn also R = 6r ist, dann schließt sich die Bahnkurve des Punktes P nach der 6-maligen Rollbewegung eines Umlaufs.

Was passiert nun aber, wenn r = 3 cm und R = 13 cm betragen? Dann ist $q = \frac{13}{3}$. Dann muss der kleine Kreis 3-mal umlaufen und dabei 13 Umdrehungen machen, dann schließt sich die Kurve wieder. Man erkennt: Ist q eine positive rationale Zahl (Bruchzahl), dann erhält man nach einer entsprechenden Umlaufzahl eine geschlossene Kurve. Ein Beispiel für „benötigte“ 5 Abrollungen für eine geschlossene Kurve zeige ich auf Seite 16.

Nun eine theoretische Überlegung zur obigen Abbildung:

Stellen Sie sich vor, dass der kleine Kreis genau eine Abrollung gemacht hat (stimmt maßstäblich hier nicht). Dann hat er sich dabei um seinen Mittelpunkt M um den Winkel δ gedreht. Und dabei hat sich dieser Mittelpunkt M um den Winkel t um O gedreht. Dabei gilt: $\delta + t = 360^\circ$!

Andererseits gilt $t = \frac{360^\circ}{q}$. Setzt man dies ein, folgt:

$$\delta = 360^\circ - \frac{360^\circ}{q} = 360^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{q-1}{q} \cdot 360^\circ,$$ das ist also weniger als eine Umdrehung!

Da der kleine Kreis aber insgesamt q-mal abrollt, folgt für δ danach

$$\delta = q \cdot \frac{q-1}{q} \cdot 360^\circ = (q-1) \cdot 360^\circ \qquad (*)$$

Das heißt, dass er bei seinen q Abrollungen selbst nur q-1 Umdrehungen macht (denn er dreht sich ja entgegengesetzt bei seinem Abrollen).

4 Herleitung der Parametergleichungen

1. Methode.

Wir verwenden $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$. (***)

Zuerst $\overrightarrow{OM}$: Es gilt: $x_M = (R-r)\cdot\cos(t)$

und: $y_M = (R-r)\cdot\sin(t)$,

also: $\overrightarrow{OM} = (R-r)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$.

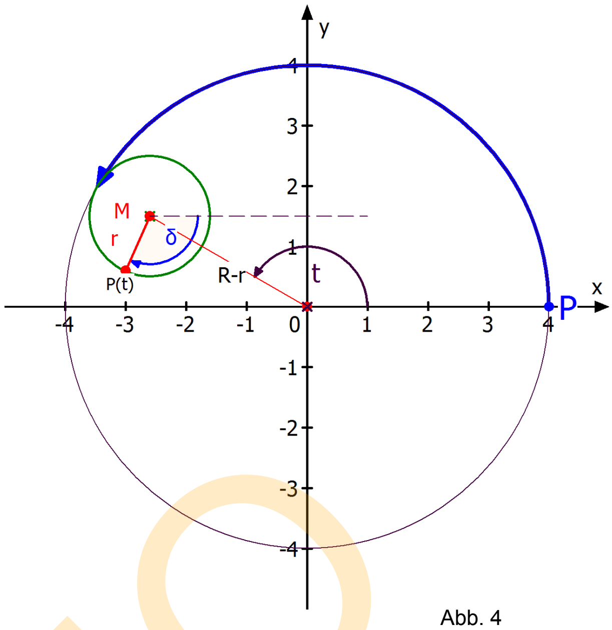


Abb. 4

Auf der vorhergehenden Seite haben wir die Gleichung $\delta = (q-1)\cdot 360^{\circ}$ (*)

hergeleitet. Sie gilt für einen vollen 360°-Umlauf.

Diese korrigieren wir nun. Wenn man beachtet, dass δ einen entgegengesetzten Umlaufsinn wie der Drehwinkel t hat, dann muss man schreiben:

$$\delta = -(q-1)\cdot 360^{\circ} = (1-q)\cdot 360^{\circ}.$$

Wenn man statt 360° nur eine Teilumdrehung um den Winkel t nimmt, lautet diese Formel:

$$\delta = -(q-1)\cdot t \qquad (**)$$

Dies benötigt man zur Berechnung des Vektors $\overrightarrow{MP}$.

Mittels Polarkoordinaten erhält man:

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}r\cdot\cos\delta\\ r\cdot\sin\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cdot\cos(-(q-1)t)\\ r\cdot\sin(-(q-1)t)\end{pmatrix}$$

Beachtet man, dass $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ gilt, dann folgt:

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}r\cdot\cos\delta\\ r\cdot\sin\delta\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\cos((q-1)t)\\ -\sin((q-1)t)\end{pmatrix}$$

Jetzt setzen wir in (***) ein:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (R-r)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos((q-1)t)\\ -\sin((q-1)t)\end{pmatrix}.$$

Zurück zu der oben dargestellten Asteroide:

Dort war R = 4, r = 1, also q = 4. Dann folgt:

$$\overrightarrow{OP} = 3\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(3t)\\ -\sin(3t)\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}3\cdot\cos(t)+\cos(3t)\\ 3\cdot\sin(t)-\sin(3t)\end{pmatrix}$$

2. Methode.

$P(x \mid y)$ ist der wandernde Punkt, dessen Koordinaten gesucht sind. P hat sich beim Abrollen des kleinen Kreises um den Winkel t von P_O nach P bewegt.

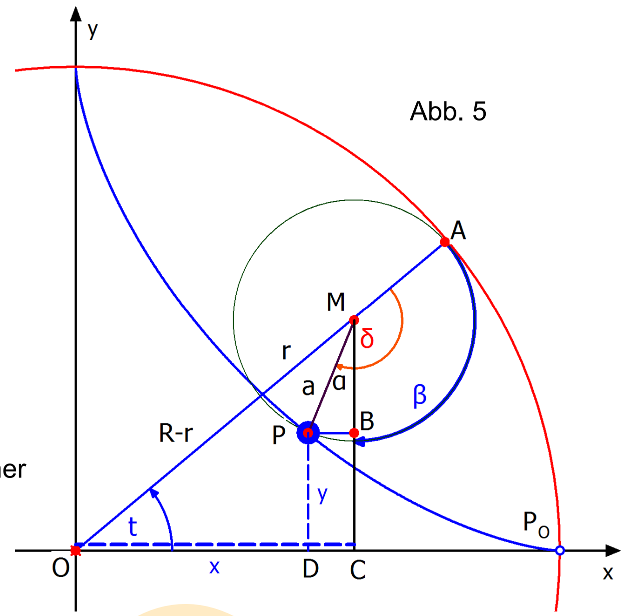


Abb. 5

Achtung: P kann wie hier auf dem kleinen abrollenden Kreis liegen, dann liegt eine Asteroide vor. P kann aber auch im Kreis oder außerhalb davon liegen. Dann liegt eine verkürzte oder verlängerte Hypozykloide vor.

Ich habe den Abstand MP mit a bezeichnet. Im Falle einer (normalen) Asteroide (und in der Abb.) ist a = r.

Diese Bögen sind gleich lang: $\overset{\frown}{P_OA} = \overset{\frown}{AP}$.

WISSEN: Für die Bogenlänge gilt (φ im Bogenmaß) die Formel: $\frac{b}{U} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow b = \frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \varphi \Rightarrow \boxed{b = r \cdot \varphi}$

Mit $\overset{\frown}{P_OA} = R \cdot t$ und $\overset{\frown}{AP} = r \cdot \delta$ folgt damit $R \cdot t = r \cdot \delta \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{R}{r} \cdot t}$

Berechnung von x: $x = \overline{OD} = \overline{OC} - \overline{DC} = \overline{OC} - \overline{PB} = (R-r) \cdot \cos(t) - a \cdot \sin(\alpha)$

$\overline{PB}$ erhält man im rechtwinkligen Dreieck MPB mit Hilfe des noch unbekannten Winkels α.

Im Dreieck OCM ist der Winkel bei M: $\sphericalangle OMC = \frac{\pi}{2} - t$ (Winkelsumme π)

Daher folgt: $\beta = \pi - \sphericalangle OMC = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{\pi}{2} + t$

Also ist $\alpha = \delta - \beta = \frac{R}{r} t - \left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \left(\frac{R}{r} - 1\right) \cdot t - \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} -\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right)$

Wir brauchen $\sin(\alpha) = \frac{\overline{PB}}{a} \Rightarrow \overline{PB} = a \cdot \sin(\alpha)$ und $\overline{OC} = \overline{OM} = R - r$,

Nebenrechnung: $\sin(\alpha) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right)\right] \overset{(1)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right) \overset{(2)}{=} \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right)$,

wobei verwendet wurde (1) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und (2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

Also gilt: $x = (R-r) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right)$

Berechnung von y: $y = \overline{PD} = \overline{MC} - \overline{MB}$ mit $\overline{MC} = (R-r) \cdot \sin(t)$ und $\overline{MB} = a \cdot \cos(\alpha)$

Nebenrechnung: $\cos(\alpha) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right)\right] \overset{(3)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right) \overset{(4)}{=} \sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right)$

wobei verwendet wurde (3) $\cos(-x) = \cos(x)$ und (2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

Also gilt: $y = (R-r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) t\right)$

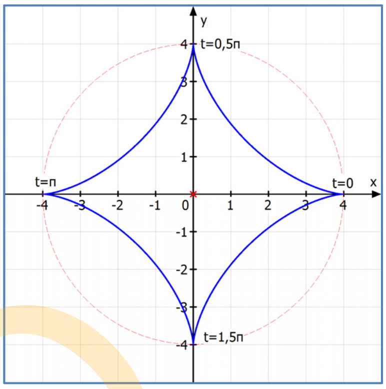
Oft verwendet man $q = \frac{R}{r}$, dann folgt: $\boxed{\overrightarrow{OP} = (R-r) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \cos((q-1)t) \\ -\sin((q-1)t) \end{pmatrix}}$

5 Berechnung des Umfangs der Asteroide

1. Möglichkeit: Aus der impliziten Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ von Seite 4 folgt:

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \qquad | \text{ hoch } 3$$

$$y^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3$$



Diese Relation enthält zwei Ersatzfunktionen:

$$y = \pm\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ich wähle die Funktion mit dem positiven Vorzeichen, deren Schaubild die beiden oberen Bögen sind.

Im Text 54011 wurde die Bogenlängenformel hergeleitet:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Dazu benötigt man die Ableitung:

$$y'(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Einsetzen in die Formel:

$$\tfrac{1}{4} U = \int_0^a \sqrt{1 + \left[-x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)}\,dx = \int_0^a \sqrt{1 + a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 1}\,dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}}\,dx = \int_0^a a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\,dx = a^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^a = a^{\frac{1}{3}} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot a^{\frac{2}{3}} = \tfrac{3}{2} \cdot a$$

Also beträgt der Umfang: $U = 6a$

Bei unserer gezeichneten Kurve war R = a = 4, also $U = 24$ LE.

Vergleichen wir mit dem Umfang des großen Kreises: $U_{gr} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 25{,}13$ LE .

Man sollte also nicht auf die Idee kommen und vermuten, dass ein Viertelbogen der Asteroide ein Viertelkreisbogen ist!

2. Möglichkeit: Aus der Parameterdarstellung:

Für „unsere“ Asteroide gilt: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}4\cdot\cos^3(t)\\4\cdot\sin^3(t)\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-12\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t)\\12\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$

Für die Bogenlänge gilt: $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$

Nebenrechnung:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(-12\cdot\cos^2(t)\sin(t)\right)^2+\left(12\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t)\right)^2$$
$$=144\cdot\left[\cos^4(t)\cdot\sin^2(t)+\sin^4(t)\cdot\cos^2(t)\right]$$
$$=144\cdot\cos^2(t)\cdot\sin^2(t)\underbrace{\left[\cos^2(t)+\sin^2(t)\right]}_{=1}=144\cdot\cos^2(t)\cdot\sin^2(t)$$

Für einen Viertelbogen folgt daher:

$$\tfrac{1}{4}U=\int_0^{\pi/2}\sqrt{144\cdot\cos^2(t)\cdot\sin^2(t)}\,dt=12\int_0^{\pi/2}\cos(t)\cdot\sin(t)\,dt \qquad (*)$$

WISSEN: Dieses Integral vereinfacht man mit **partieller Integration**:

$\int u'\cdot v\,dt=u\cdot v-\int u\cdot v'\,dt$ mit $u'=\cos(t)\Rightarrow u=\sin(t)$, $v=\sin(t)\Rightarrow v'=\cos(t)$

Also:

$$\int_0^{\pi/2}\cos(t)\cdot\sin(t)\,dt=\left[\sin^2(t)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin(t)\cdot\cos(t)\,dt \qquad \mid+\int_0^{\pi/2}\sin(t)\cdot\cos(t)\,dt$$
$$2\cdot\int_0^{\pi/2}\cos(t)\cdot\sin(t)\,dt=\left[\sin^2(t)\right]_0^{\pi/2}=1$$
$$\int_0^{\pi/2}\cos(t)\cdot\sin(t)\,dt=\frac{1}{2}$$

Schließlich nach (*)

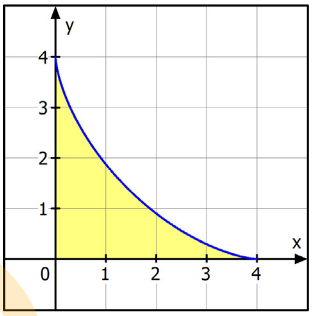
$$\tfrac{1}{4}U=12\cdot\tfrac{1}{2}\Rightarrow U=24\ (LE)$$

6 Berechnung der Fläche der Asteroide

Für Flächensegmente gilt: $A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = \ldots$ (Siehe Text 54011 Seite 46 ff.)

Ich berechne die Fläche zwischen einem Viertelbogen und den Koordinatenachsen.

Nun muss man beachten, dass die Funktion x(t) streng monoton wachsen soll. Man muss also hier diesen Ansatz machen:



$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{0} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = -\int_0^{\pi/2} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt =$$

Denn zu x = 0 gehört die Spitze $S(0\,|\,4)$, die zu $t = \tfrac{1}{2}\pi$ gehört.

Es gilt: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos^3(t) \\ 4\cdot\sin^3(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -12\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t) \\ 12\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$

Setzt man ein: $y(t) = 4\cdot\sin^3(t)$ und $\dot{x}(t) = -12\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t)$

Dann folgt: $\tfrac{1}{4}A = -\int_0^{\pi/2} \left[4\cdot\sin^3(t)\cdot(-12)\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t)\right]dt = 48\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t)\,dt$

Mit $\cos^2(t) = 1-\sin^2(t)$ folgt:

$$\tfrac{1}{4}A = 48\int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cdot(1-\sin^2(t))\,dt$$

$$= 48\int_0^{\pi/2} (\sin^4(t)-\sin^6(t))\,dt = 48\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\,dt}_{A_1} - 48\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^6(t))\,dt}_{A_2} \qquad (*)$$

Diese beiden sehr schwer zu berechnenden Integrale können nur mittels <u>mehrfacher partieller Integration</u> vereinfacht und berechnet werden. Dabei werden sie wie folgt auf andere Integrale zurückgeführt.

(1) Zuerst berechnet man: $\int \sin^2(t)\,dt$ mit der partiellen Integration

$$\int u'\cdot v\cdot dx = u\cdot v - \int v'\cdot u\cdot dx \quad \text{mit} \quad \begin{Bmatrix} u' = \sin(t) & \Rightarrow & u = -\cos(t) \\ v = \sin(t) & \Rightarrow & v' = \cos(t) \end{Bmatrix}$$

$$\int \sin^2(t)\,dt = \int \underbrace{\sin(t)}_{u'}\cdot\underbrace{\sin(t)}_{v}\,dt = -\sin(t)\cdot\cos(t) + \int \cos^2(t)\,dt$$

Man kommt jetzt nur weiter, indem man die „Pythagoras-Gleichung“ zur Anwendung bringt. Mit ihr kann man $\cos^2 x$ ersetzen:

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\cos^2 t = 1-\sin^2 t$.

$$\int \sin^2(t)\,dt = -\sin(t)\cdot\cos(t) + \int (1-\sin^2(t))\,dt$$

$$\int \sin^2(t)\,dt = -\sin(t)\cdot\cos(t) + \underbrace{\int 1\,dt}_{t} - \int \sin^2(t)\,dt \qquad \Big|+\int \sin^2(t)\,dt$$

$$2\int \sin^2(t)\,dt = -\sin(t)\cdot\cos(t) + t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int \sin^2(t)\,dt = -\tfrac{1}{2}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{1}{2}t}$$

(2) Als nächstes berechnet man das Integral $\int \sin^4(t)\,dt$ mit partieller Integration:

$$\int \sin^4(t)\,dt = \int \sin^3(t)\cdot\sin(t)\,dt \qquad \begin{array}{l} u' = \sin(t) \;\Rightarrow\; u = -\cos(t) \\ v = \sin^3(t) \;\Rightarrow\; v' = 3\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t) \end{array}$$

$$\int \sin^4(t)\,dt = -\sin^3(t)\cdot\cos(t) + 3\int \sin^2(t)\cdot\cos^2(t)\,dt$$

$$\int \sin^4(t)\,dt = -\sin^3(t)\cdot\cos(t) + 3\int \sin^2(t)\cdot\left(1-\sin^2(t)\right)dt$$

$$\int \sin^4(t)\,dt = -\sin^3(t)\cdot\cos(t) + 3\underbrace{\int \sin^2(t)\,dt}_{\text{siehe oben}} - 3\int \sin^4(t)\,dt \qquad \Big|\; +3\int \sin^4(t)\,dt$$

$$4\int \sin^4(t)\,dt = -\sin^3(t)\cdot\cos(t) + 3\left[-\tfrac{1}{2}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{1}{2}t\right]$$

$$4\int \sin^4(t)\,dt = -\sin^3(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{3}{2}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{3}{2}t \qquad \Big|\; :4$$

$$\boxed{\int \sin^4(t)\,dt = -\tfrac{1}{4}\sin^3(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{3}{8}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{3}{8}t}$$

(3) Nun folgt: $\int \sin^6(t)\,dt = \int \sin^5(t)\cdot\sin(t)\,dt$ mit $\begin{array}{l} u' = \sin(t) \;\Rightarrow\; u = -\cos(t) \\ v = \sin^5(t) \;\Rightarrow\; v' = 5\cdot\sin^4(t)\cdot\cos(t) \end{array}$

$$\int \sin^6(t)\,dt = -\sin^5(t)\cdot\cos(t) + 5\int \sin^4(t)\cdot\cos^2(t)\,dt$$

$$\int \sin^6(t)\,dt = -\sin^5(t)\cdot\cos(t) + 5\int \sin^4(t)\cdot\left(1-\sin^2(t)\right)dt$$

$$\int \sin^6(t)\,dt = -\sin^5(t)\cdot\cos(t) + 5\int \sin^4(t)\,dt - 5\int \sin^6(t)\,dt \qquad \Big|\; +5\int \sin^6(t)\,dt$$

$$6\int \sin^6(t)\,dt = -\sin^5(t)\cdot\cos(t) + 5\underbrace{\int \sin^4(t)\,dt}_{\text{aus}(2)}$$

$$6\int \sin^6(t)\,dt = -\sin^5(t)\cdot\cos(t) + 5\left[-\tfrac{1}{4}\sin^3(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{3}{8}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{3}{8}t\right]$$

$$6\int \sin^6(t)\,dt = -\sin^5(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{5}{4}\sin^3(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{15}{8}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{15}{8}t \qquad \Big|\; :6$$

$$\boxed{\int \sin^6(t)\,dt = -\tfrac{1}{6}\sin^5(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{5}{24}\sin^3(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{5}{16}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{5}{16}t}$$

Für die Teilintegrale in (*) folgt unter Verwendung von $\sin(0) = 0$ und $\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 0$

$$A_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\,dt = \left[-\tfrac{1}{4}\sin^3(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{3}{8}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{3}{8}t\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{16}\pi$$

$$A_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^6(t)\,dt = \left[-\tfrac{1}{6}\sin^5(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{5}{24}\sin^3(t)\cdot\cos(t) - \tfrac{5}{16}\sin(t)\cdot\cos(t) + \tfrac{5}{16}t\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{5}{16}\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{5}{32}\pi$$

Aus (*) folgt: $\tfrac{1}{4}A = 48A_1 - 48A_2 \;\Rightarrow\; A = 192\,A_1 - 192A_2 = 192\left(A_1 - A_2\right)$

$$A = 192\cdot\left(\tfrac{3}{16} - \tfrac{5}{32}\right)\pi = 192\cdot\tfrac{1}{32}\pi = 6\pi$$

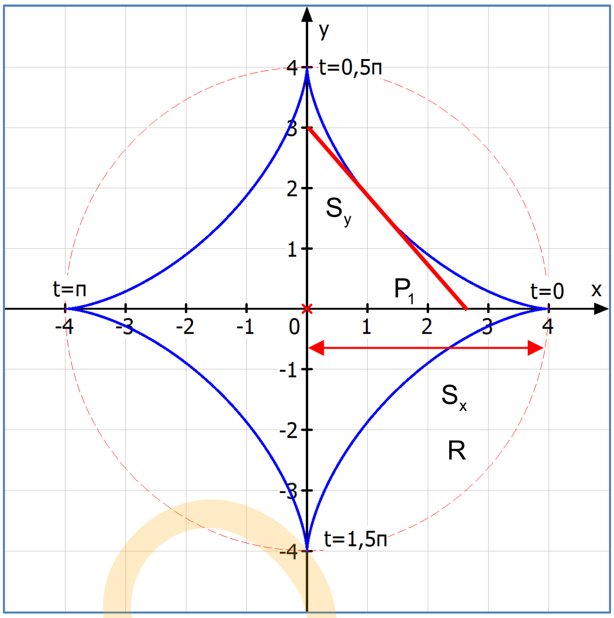
Auf Seite 3 hatte ich angegeben, dass die Asteroidenfläche $A = \tfrac{3}{8}\pi a^2$ beträgt.

Setzt man hier a = 4 ein, folgt $A = 6\pi$, was ich soeben berechnet hatte.

7 Geometrische Eigenschaften der Asteroide

$\boxed{1}$ Die Stangenkonstruktion

Die Asteroide berührt mit ihren vier Spitzen den Kreis mit dem Radius R (hier R = 4).
Also ist $\overline{MA} = \overline{MB} = R$. Dieselbe Länge hat aber auch jeder Tangentenabschnitt zwischen den Schnittpunkten der Tangente mit den Koordinatenachsen: $\overline{S_1S_2} = R$.
Wenn man also die gezeichnete schräge Strecke S_1S_2 („Stange") abgleiten lässt, so dass sich S_1 auf der x-Achse nach rechts gegen A bewegt, und S_2 entlang der y-Achse gegen den Ursprung, dann berührt diese Stange stets die Asteroide.



Beweis:

Es sei $P_1\left(x(t)\,|\,y(t)\right)$ ein beliebiger Kurvenpunkt des Bogens AB mit . $t \neq 0$

Es gilt $\qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R\cdot\cos^3(t) \\ R\cdot\sin^3(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3R\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t) \\ 3R\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$

Tangentensteigung: $\qquad y'(t) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\dfrac{3R\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t)}{3R\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t)} = -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Tangentengleichung in P_1: $\qquad y - y(t) = y'(t)\left(x - x(t)\right)$

$$y = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\left(x - R\cdot\cos^3(t)\right) + R\cdot\sin^3(t)$$

$$y = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cdot R\cos^3(t) + R\cdot\sin^3(t)$$

$$y = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + R\cdot\sin(t)\cdot\underbrace{\cos^2(t)}_{1-\sin^2(t)} + R\cdot\sin^3(t)$$

Tangente: $\qquad y = -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}x + R\cdot\sin(t) - \cancel{R\cdot\sin^3(t)} + \cancel{R\cdot\sin^3(t)}$

Schnittpunkt S_x der Tangente mit der x-Achse: Bedingung: y = 0:

$$0 = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + R\cdot\sin(t) \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin(t)}{\cos(t)}x = R\cdot\sin(t) \quad \Big| \cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \quad (t \neq 0)$$

$$x = R\cdot\cos(t)$$

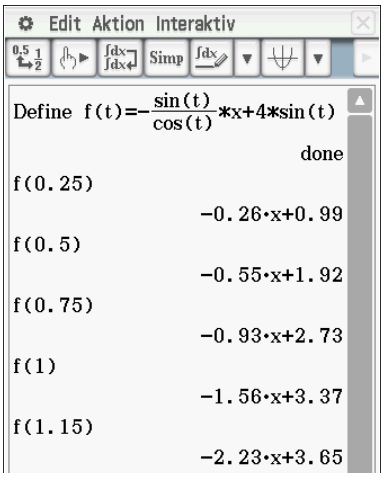
Ergebnis: $\qquad S_x\left(R\cdot\cos(t)\,|\,0\right)$

Schnittpunkt S_y der Tangente mit der y-Achse: $\qquad S_y\left(0\,|\,R\cdot\sin(t)\right)$

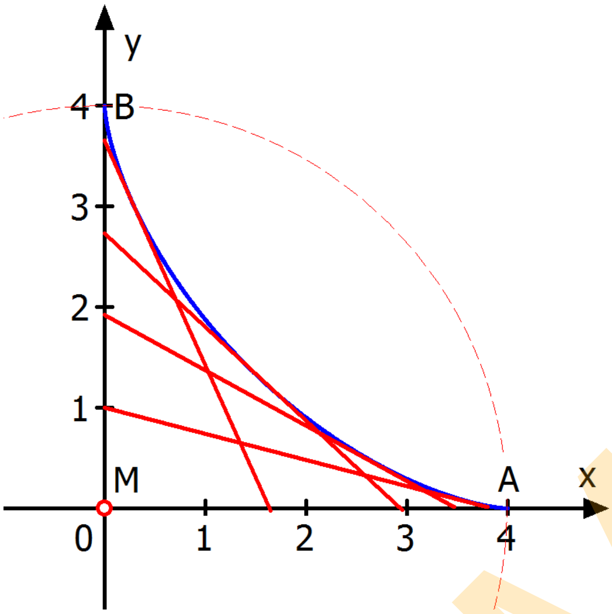
Länge der Strecke S_xS_y: $\quad L = \sqrt{\left(R\cdot\cos(t)\right)^2 + \left(R\cdot\sin(t)\right)^2} = \sqrt{R^2\cdot\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)} = \sqrt{R^2} = R$,

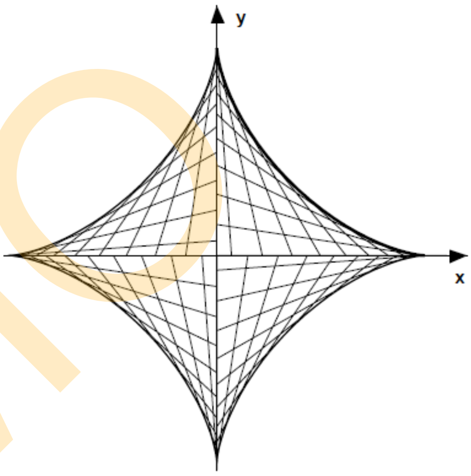
was zu beweisen war.

Ich habe mit dem CAS-Rechner CASIO ClassPad die Tangentengleichungen zu einigen t-Werten berechnet und die Tangenten dann mit MatheGrafix zeichnen lassen. Jetzt erkennt man dieses Abrutschen der Strecke BM in die Lage MA.



Bei konstanter Streckenlänge R berührt sie stets die Asteroide.





In der Abbildung rechts sind sehr viele solche Strecken eingezeichnet. So ergibt sich quasi automatisch die Asteroide

(Quelle: Mössner)

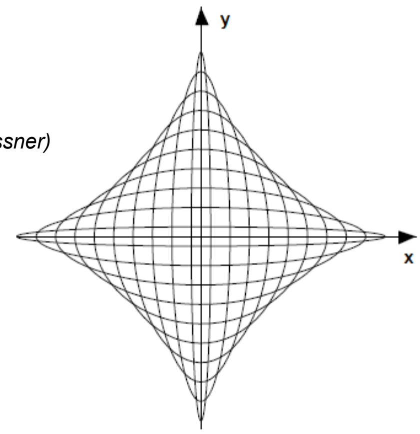
als Begrenzungskurve. Dies nennt man auch die „Stangenkonstruktion“.

Hinweis: Auf der nächsten Seite folgt noch ein weiterer Beweis zur Stangenkonstruktion, der allerdings fast Hochschulniveau hat.

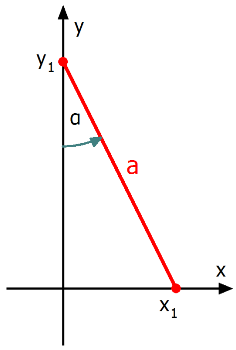
2 Die Asteroide tritt auch als Hüllkurve einer Ellipsenschar auf

Siehe auch http://mathematik.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/mathematik.bildung-rp.de/Sekundarstufe_II/MatheAG-SII/pdf/Garage.pdf
(Garagentor führt zur Asteroide).

(Quelle: Mössner)



2. Beweis für diese Stangenkonstruktion (Herleitung der impliziten Gleichung)



Die Stange habe die Länge a. Die Achsenabschnittsgleichung der Stange

hat die Form: $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1$

Wegen $\sin(\alpha)=\frac{x_1}{a} \Rightarrow x_1=a\cdot\sin(\alpha)$. Analog gilt $y_1=a\cdot\cos(\alpha)$.

Dies ergibt: $\frac{x}{a\cdot\sin(\alpha)}+\frac{y}{a\cdot\cos(\alpha)}=1 \quad |\cdot a\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$$x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)=a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

Daraus definieren wir die Funktion F durch

$$F(x,y,\alpha)=x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)-a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

Jede einzelne Tangente ist Lösung der Gleichung $F(x,y,\alpha)=0$.

Aus der kurzen Theorie im Text 54031 „Hüllkurven“ folgt, dass man die Gleichung der Hüllkurve als Lösung dieses Gleichungssystems erhält:

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0 & (1) \\ \frac{d}{d\alpha}F(x,y,\alpha)=0 & (2) \end{cases}$$

Die Ableitung der impliziten Funktion F nach α lautet (x und y werden dabei als Konstante behandelt):

$$\frac{d}{d\alpha}F(x,y,\alpha)=-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left[\cos^2(\alpha)+\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)\right]$$
$$=-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\right)$$

Das Gleichungssystem lautet damit

Zuerst:
$$\begin{cases} x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)-a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=0 & (1) \\ -x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\right)=0 & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} |\cdot\cos(\alpha) \\ |\cdot(-\sin(\alpha)) \end{array}$$

$$\begin{cases} x\cdot\cos^2(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha)=a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha) & (3) \\ x\cdot\sin^2(\alpha)-y\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=a\cdot\left(-\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)+\sin^3(\alpha)\right) & (4) \end{cases}$$

(3) + (4): $x\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\right)=a\cdot\sin^3(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{x=a\cdot\sin^3(\alpha)}$

Dann:
$$\begin{cases} x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)-a\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=0 & (1) \\ -x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)-a\cdot\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\right)=0 & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} |\cdot\sin(\alpha) \\ |\cdot\cos(\alpha) \end{array}$$

$$\begin{cases} x\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin^2(\alpha)=a\cdot\sin^2(\alpha)\cdot\cos(\alpha) & (5) \\ -x\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\cos^2(\alpha)=a\cdot\left(\cos^3(\alpha)-\sin^2(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\right) & (6) \end{cases}$$

$y\cdot\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)=a\cdot\cos^3(\alpha) \Leftrightarrow \boxed{y=a\cdot\cos^3(\alpha)}$

Wir berechnen: $x^{2/3}+y^{2/3}=\left(a\cdot\sin^3(\alpha)\right)^{2/3}+\left(a\cdot\cos^3(\alpha)\right)^{2/3}$
$$=a^{2/3}\cdot\sin^2(\alpha)+a^{2/3}\cdot\cos^2(\alpha)=a^{2/3}\cdot\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)$$

Also gilt: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

Die Einhüllende ist somit die Asteroide.

8 Hier noch einige andere Asteroiden:

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t)+\cos(2t) \\ 2\cdot\sin(t)-\sin(2t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;2\pi[$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(t)+\cos(4t) \\ 4\cdot\sin(t)-\sin(4t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;2\pi[$

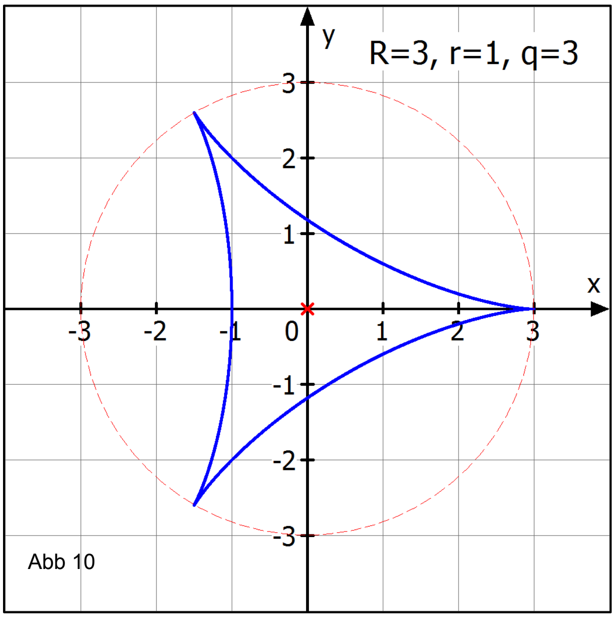


Abb 10

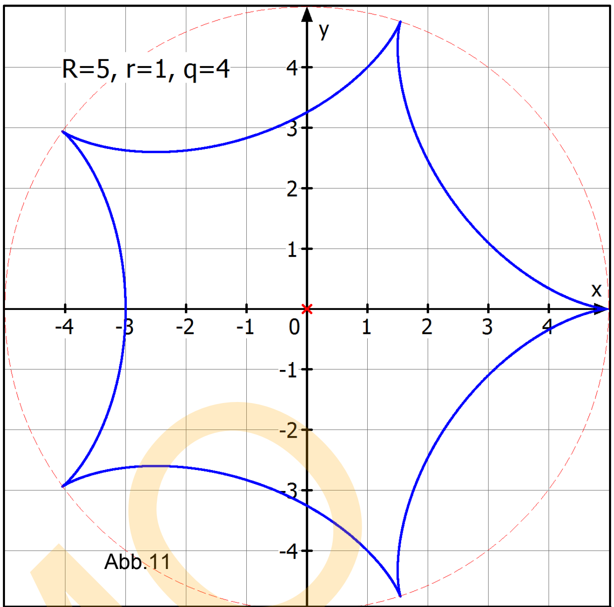


Abb.11

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2{,}8\cdot\cos(t)+\cos(2{,}8t) \\ 2.8\cdot\sin(t)-\sin(2{,}8t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;10\pi[$

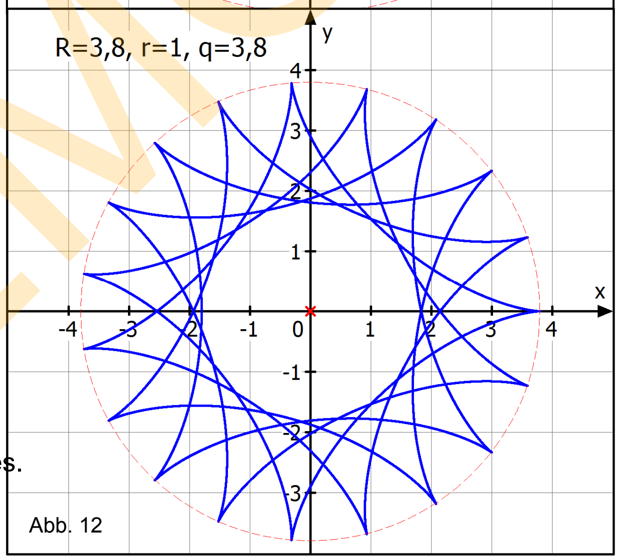
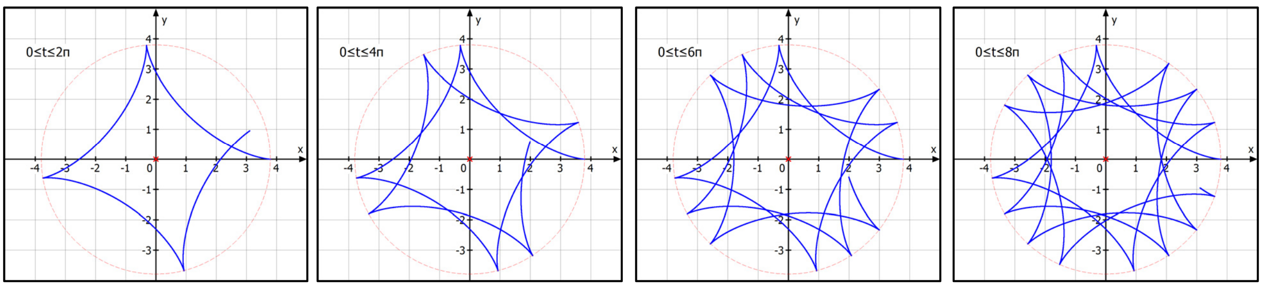


Abb. 12

Wie auf Seite 6 beschrieben, braucht der kleine Kreis mehr als einen Umlauf, wenn $q = \frac{R}{r}$ nicht ganzzahlig ist, damit sich die Bahnkurve des Punktes P auf dem kleinen Kreis schließt. Hier sind es 5 Umläufe.
Begründung: Dann ist der 5-fache Umfang des großen Kreises $U_{gr} = 5\cdot 2\pi\cdot 2{,}8 = 28\pi$
Dann ist der Umfang des großen Kreises 3,8-mal so groß wie der Umfang des kleinen inneren Kreises.
Das heißt aber, dass der kleine Kreis insgesamt 5-mal 3,8 Abrollungen macht, bis er wieder in der Ausgangslage P_O angekommen ist, also 19 Abrollungen, und die Bahnkurve hat sich geschlossen.

Die folgenden 4 Abbildungen zeigen die noch nicht geschlossene Kurve nach 1 bis 4 Abrollungen (Abb. 13 bis 16).



Bei den Zykloiden habe ich im gezeigt, dass man Variationen für die Kurve erhält, wenn man als „wandernden" Punkt nicht einen Randpunkt des abrollenden Kreises nimmt, sondern einen, wer weiter innen bzw. weiter außen liegt. Dies kann man selbstverständlich auch bei den Hypozykloiden machen.

Ihre Gleichungen sehen allgemein so aus:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (R-r)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}\cos((q-1)t)\\ -\sin((q-1)t)\end{pmatrix}$$

Oder wegen R = qr

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = r\cdot(q-1)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}\cos((q-1)t)\\ -\sin((q-1)t)\end{pmatrix}$$

Dabei ist a der Radius der wandernden Punktes auf dem kleinen Kreis.
Das muss man sich natürlich ansehen. Ich zeige auf Seite 17 6 Hypozykloiden immer mit r = 1 aber unterschiedlichen Radien R und verschiedenen Abständen a des wandernden Punktes vom Mittelpunkt M‘ des kleinen Kreises.

(1) In Abb. 17 hat der wandernde Punkt den Abstand $a = \frac{1}{3}r$ vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises. Es liegt demnach eine **verkürzte Hypozykloide** vor.

Gleichung: $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}3\cdot\cos(t) + \frac{1}{3}\cos(3t)\\ 3\cdot\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(3t)\end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0;2\pi[$$

(2) In Abb. 18 liegt eine **verlängerte Hypozykloide** vor, denn der wandernde Punkt hat den Abstand a = 1,5 r vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises.

Gleichung: $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}3\cdot\cos(t) + 1{,}5\cdot\cos(3t)\\ 3\cdot\sin(t) - 1{,}5\cdot\sin(3t)\end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0;2\pi[$$

(3) In Abb. 19 liegt eine **verlängerte Hypozykloide** vor, denn der wandernde Punkt hat den Abstand a = 3 r vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises.

Gleichung: $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}3\cdot\cos(t) + 3\cdot\cos(3t)\\ 3\cdot\sin(t) - 3\cdot\sin(3t)\end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0;2\pi[$$

(4) In Abb. 20 liegt eine **verlängerte Hypozykloide** vor, denn der wandernde Punkt hat den Abstand a = 4 r vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises.

Gleichung: $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}8{,}6\cdot\cos(t) + 4\cdot\cos(8{,}6t)\\ 8{,}6\cdot\sin(t) - 4\cdot\sin(8{,}6t)\end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0;10\pi[$$

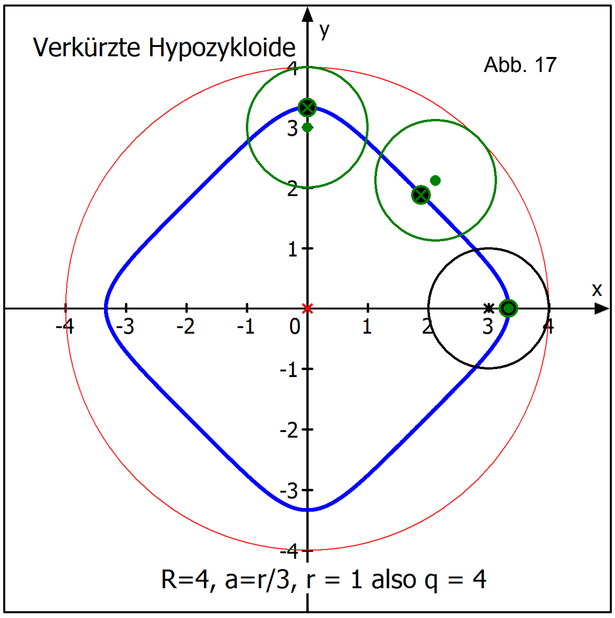
(5) In Abb. 21 liegt eine **verlängerte Hypozykloide** vor, denn der wandernde Punkt hat den Abstand a = 4 r vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises, aber R = 8r.

Gleichung: $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}8{,}6\cdot\cos(t) + 4\cdot\cos(8{,}6t)\\ 8{,}6\cdot\sin(t) - 4\cdot\sin(8{,}6t)\end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0;10\pi[$$

(6) In Abb. 22 liegt eine **verlängerte Hypozykloide** vor, denn der wandernde Punkt hat den Abstand a = 4 r vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises. Hier ist $R = 9{,}6\cdot r$.

Gleichung: $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}8{,}6\cdot\cos(t) + 4\cdot\cos(8{,}6t)\\ 8{,}6\cdot\sin(t) - 4\cdot\sin(8{,}6t)\end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0;10\pi[$$

Statt verlängerte Zykloide sagt man auch Schleifenzykloide.


Verkürzte Hypozykloide
Abb. 17
R=4, a=r/3, r = 1 also q = 4

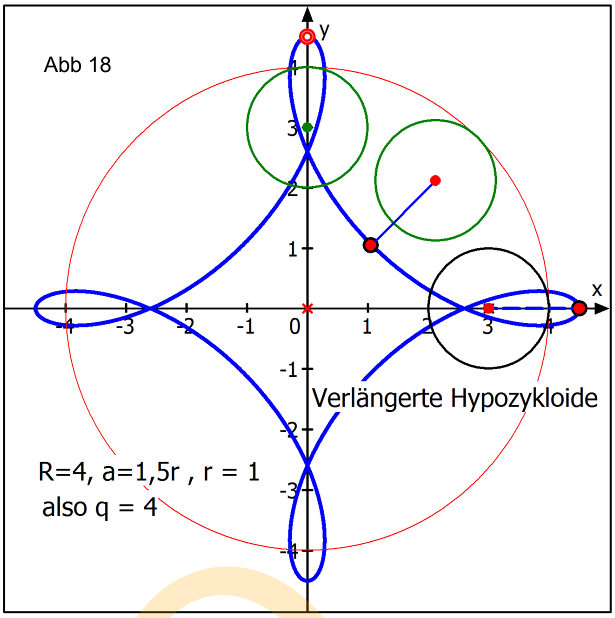
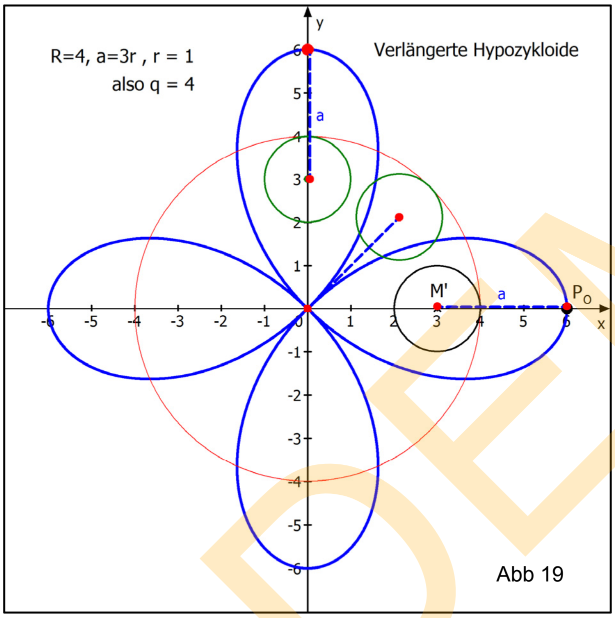
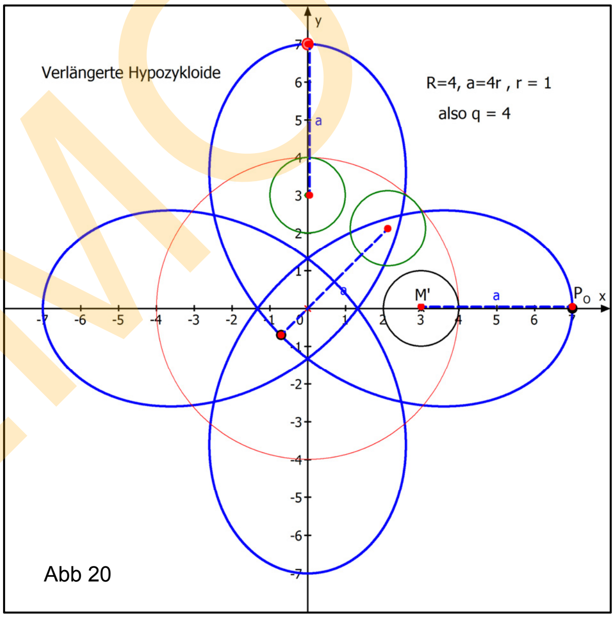
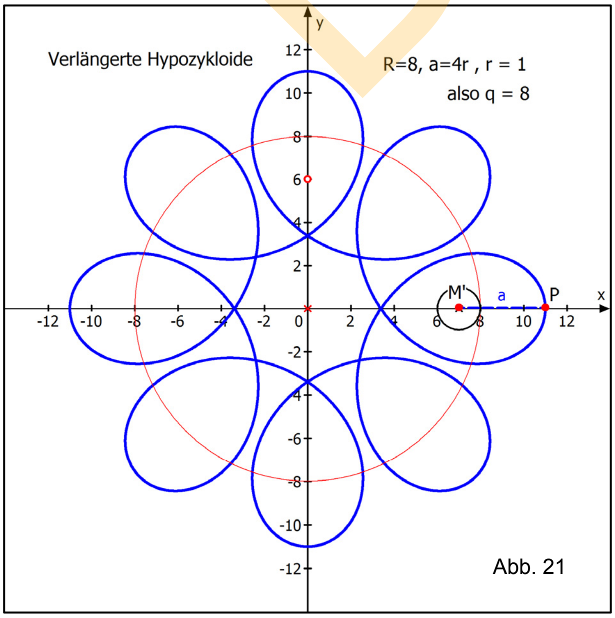
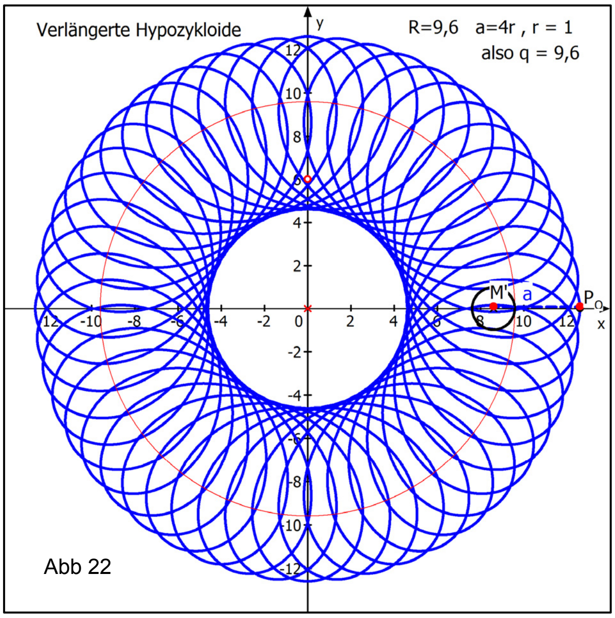


Abb 18
Verlängerte Hypozykloide
R=4, a=1,5r , r = 1
also q = 4


R=4, a=3r , r = 1
also q = 4
Verlängerte Hypozykloide
Abb 19


Verlängerte Hypozykloide
R=4, a=4r , r = 1
also q = 4
Abb 20


Verlängerte Hypozykloide
R=8, a=4r , r = 1
also q = 8
Abb. 21


Verlängerte Hypozykloide
R=9,6 a=4r , r = 1
also q = 9,6
Abb 22

Interessant ist auch die **Steinersche Hypozykloide**, denn man kann sie auf zwei Arten erzeugen:

Abb. 23:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)+2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\\ \sin(t)-2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\end{pmatrix}\quad \text{für } t\in[0;4\pi[$$

Hier ist $r=\frac{2}{3}\cdot R$,

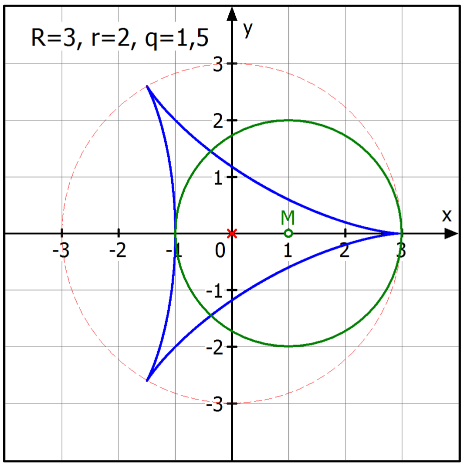


Abb. 24

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\cos(t)+\cos(2t)\\ 2\sin(t)-\sin(2t)\end{pmatrix}\quad \text{für } t\in[0;2\pi[$$

Hier ist $r=\frac{1}{3}\cdot R$,

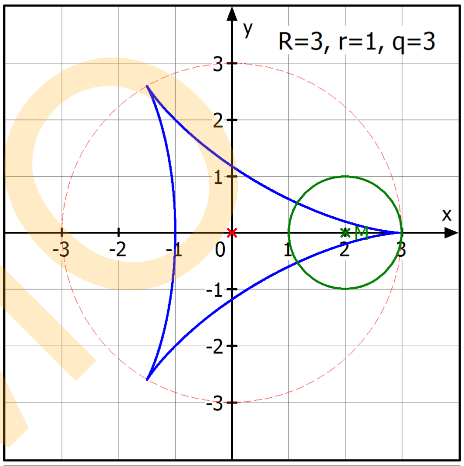


Abb. 25

Verwendet man $r=\frac{1}{2}R$ aber a = r,

ergibt sich ein Sonderfall:

Die „Hypozykloide“ entartet zum **Kreisdurchmesser**.

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1{,}5\cos(t)+1{,}5\cos(t)\\ 1{,}5\sin(t)-1{,}5\sin(t)\end{pmatrix}\quad \text{für } t\in[0;2\pi[$$

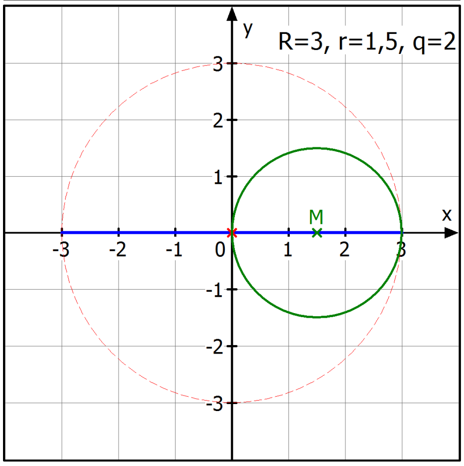


Abb. 26

Verwendet man $r=\frac{1}{2}R$ aber $a\neq r$, erhält man

eine **Ellipse**. Hier ist a = 1.

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1{,}5\cos(t)+a\cdot\cos(t)\\ 1{,}5\sin(t)-a\cdot\sin(t)\end{pmatrix}\quad \text{für } t\in[0;2\pi[$$